ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Πρόκειται για τη διαδικασία μετατροπής ενός αθροίσματος σε γινόμενο. Ο μαθητής μπορεί να τη σκεφτεί ως την αντίστροφη διαδικασία της επιμεριστικής ιδιότητας.
Είναι πολύ σημαντική για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου του 2, καθώς και για την επίλυση άλλων ειδών εξισώσεων.

Μέθοδοι παραγοντοποίησης:

1. Κοινός παράγοντας από όλους τους όρους του αθροίσματος:

$$\alpha x+\alpha y+\alpha z = \alpha(x+y+z)$$

πχ $x^3+12x^2+36x = x(x^2+12x+36)$

$4\alpha^3\beta^2 - 2\alpha^2\beta^3+\alpha\beta^2 = \alpha\beta^2(4\alpha^2-2\alpha\beta+1)$

2. Παραγοντοποίηση **κατά ομάδες** (ζεύγη/τριάδες κτλ):

Όταν δεν υπάρχει κοινός παράγοντας μεταξύ όλων των όρων, αλλά υπάρχει μεταξύ κάποιων ομάδων εξ'αυτών.

$$\alpha x+\alpha y+\beta x+\beta y =$$
$$\alpha(x+y)+\beta(x+y) =$$
$$(x+y)(\alpha+\beta)$$

Παρατηρούμε ότι μεταξύ των δύο πρώτων όρων του αθροίσματος κοινός παράγοντας είναι το **α** , ενώ μεταξύ των δύο τελευταίων όρων κοινός παράγοντας είναι το **β**.

Μετά από αυτό, παρατηρούμε ότι σχηματίζονται πλέον δύο νέοι όροι, με κοινό παράγοντα το **(x+y)** , οπότε η παραγοντοποίηση συνεχίζεται και η παράσταση παραγοντοποιείται πλήρως.

πχ $2x(x+1)-7x-7 = 2x(x+1)-7(x+1) = (x+1)(2x-7)$

$3\alpha x-6\alpha+x-2 = 3\alpha(x-2)+(x-2) = (x-2)(3\alpha+1)$

$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7 = 1-x+x^2(1-x)+x^4(1-x)+x^6(1-x) =$

$(1-x)(1+x^2+x^4+x^6)$

3. Παραγοντοποίηση αντίθετων όρων (**αλλαγή προσήμου**):

$\alpha x-\alpha y+\beta y-\beta x =$

$\alpha(x-y)+\beta(y-x) =$

$\alpha(x-y)-\beta(x-y) =$

$(x-y)(\alpha-\beta)$

Μετά την παραγοντοποίηση κατά ζεύγη παρατηρούμε ότι μέσα στις δύο παρενθέσεις έχουμε αντίθετους αριθμούς (**x-y** και **y-x**). Αλλάζουμε τα πρόσημα εντός της μίας παρένθεσης, αλλάζοντας και το πρόσημο που υπάρχει μπροστά από αυτή: **(y-x)** → **-(x-y)**

4. Παραγοντοποίηση κατά ομάδες μετά από **διάσπαση όρου**:

πχ $1-x+x^2-2x^3+x^4 = 1-x+x^2-x^3-x^3+x^4 = 1-x+x^2-x^3-x^3+x^4 =$

$1-x+x^2(1-x)+x^3(x-1) = 1-x+x^2(1-x)-x^3(1-x) = (1-x)(1+x^2-x^3)$

5. Οι γνωστές μας **Ταυτότητες** αποτελούν μη προφανείς παραγοντοποιήσεις:

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$$

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$$

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

$$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3$$

$$\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3=(\alpha-\beta)^3$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$$

πχ $x^2y^4-9z^8 = (xy^2)^2-(3z^4)^2 = (xy^2+3z^4)(xy^2-3z^4)$

$x^3+12x^2+36x = x(x^2+12x+36) = x(x^2+2\cdot 6\cdot x+6^2) = x(x+6)^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Α. Απλώς βγάλτε κοινό παράγοντα:

1. $x^2 - x =$
2. $x^2 + 2x =$
3. $2x - x^2 =$
4. $4x^2 - 8x =$
5. $2x - 2 =$
6. $4x + 2 =$
7. $-3x + 6 =$
8. $-5x - 25 =$
9. $-5x + 5 =$
10. $4y + 4 =$
11. $14x - 4 =$
12. $24x + 16 =$
13. $4x^3 + 2x^2 =$
14. $8x^2 - 12x^3 =$
15. $6x^2y - 3xy^2 =$
16. $4a^3b^2 + 2ab^3 - ab^2 =$
17. $3xy^3 - 6x^2y^2 + xy^2 =$
18. $-3x^3y^2 + 9x^4y^4 =$

Β. Συνεχίζουμε με κοινό παράγοντα:

1. $6x^3\left(x-a\right) - 3x^2\left(x-a\right) =$
2. $2xy\left(x-2\right)^2 - 4x^2y\left(x-2\right)^3 =$
3. $4x\left(x+3\right)^2 - 6x^2\left(x+3\right) =$
4. $2y\left(2y-1\right) + 3\left(1-2y\right) =$
5. $4x\left(x-2\right) - 2\left(2-x\right) =$
6. $2x\left(x+1\right) - 7x - 7 =$
7. $3x\left(2x-1\right) - 2x + 1 =$
8. $4x\left(2-3x\right) + 4 - 6x =$

Γ. Ομαδοποιείστε τις παρακάτω ποσότητες (σε ζεύγη):

1. $3ax - 6a + x - 2 =$
2. $2xy - 4ay - x + 2a =$
3. $2a^2 - 6a - ax + 3x =$
4. $ax^2 + a^2x - 3x - 3a =$
5. $3a^2x - 6a^2 - 2yx + 4y =$
6. $2a^3x^2 + 4ay^2 + 12xy^2 + 6a^2x^3 =$
7. $3x + 2ax - 3a - 2x^2 =$
8. $2x(x-3) - 3a(x-3) - 4x + 6a =$

Δ. Διαφορές τετραγώνων, από τις απλούστερες προς τις δυσκολότερες:

1. $4x^2 - 9 =$
2. $16 - 9a^2 =$
3. $a^2x^4 - 25 =$
4. $a^4 - 4x^6 =$
5. $x^4 - a^4 =$
6. $a^2 - 4x^4 =$
7. $\left(3x-2\right)^2 - 25 =$
8. $\left(2a+1\right)^2 - \left(1-3a\right)^2 =$
9. $\left(x-5\right)^2 - 4x^2 =$
10. $\left(x+5\right)^2 - \left(1-3x\right)^2 =$
11. $16x^2 - \left(2x-3\right)^2 =$
12. $\left(7-2x\right)^2 - \left(3x-2\right)^2 =$
13. $4x^2 - \left(3x+1\right)^2 =$
14. $4\left(2x-1\right)^2 - 9\left(x+2\right)^2 =$
15. $4ax^2 - 9a =$
16. $2a^3x^4 - 8ax^8 =$
17. $4a^2\left(x-2\right) - 9\left(x-2\right) =$
18. $2x^4(x-1) + 8x^2(1-x) =$

Ε. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις σαν τετράγωνο διωνύμων:

1. $4x^2+1+8x=$
2. $25+10x^2+x^4=$
3. $9a^2+12ax^2+4x^4=$
4. $a^2+\frac{9}{a^2}+6=$
5. $4x^2+9y^2+12xy=$
6. $a^2x^4+y^2+2ayx^2=$
7. $y^6+8y^3x^2+16x^4=$
8. $2x+1+x^2=$
9. $6a^3x^3+9a^4x^2+a^2x^4=$
10. $4xy^2+x^2+4y^4=$
11. $x^4+10x^2+25=$
12. $9a^2y^2+12ay^3+4y^4=$

ΣΤ. Έχουν κοινό παράγοντα , αλλά υπάρχει και συνέχεια:

1. $4x^2(x-3)-x+3=$
2. $9(2x-1)-2a^2x+a^2=$
3. $x^2(a-2)-16(a-2)=$
4. $x^2(a+1)-4x(a+1)+4(a+1)=$
5. $a^2(x-2)+4ay(x-2)+4y^2(x-2)=$
6. $16(x-3)^2-4a^2(3-x)^2=$
7. $x^2(x-2)+4x(2-x)+4x-8=$
8. $x^3(x+2)-4x(x+2)+ax^2+4ax+4a=$
9. $x^2(2x-1)-3x(2x-1)+4x-2=$
10. $x^2(2a-3)^3-4x(2a-3)^2+8a-12=$

Ζ. Ομαδοποίηση , προτιμήστε το τρεις – ένας και εφαρμόστε ταυτότητες:

1. $x^2+2x+1-a^2=$
2. $x^2-2ax+a^2-16=$
3. $1-x^2+2ax-a^2=$
4. $9a^2-4x^2-4x-1=$
5. $25x^4+10x^2+1-9x^6=$
6. $x^2+\frac{1}{x^2}+1=$
7. $9x^2-9-y^2-6y=$
8. $2x+4a^2-1-x^2=$
9. $4x^2+12x+9-y^2+2ay-1=$
10. $y^2+\frac{4}{y^2}-5$
11. $27a^3-12ax^2-12ax-3a=$
12. $x+\frac{1}{x}-3=$

Η. Διασπάστε κατάλληλα έναν από τους τρεις όρους και παραγοντοποιήστε:

1. $x^2-5x+6=$
2. $x^2-5xy-4y^2=$
3. $x^2+3x+2=$
4. $4x^2-7xy+3y^2=$
5. $x^2-4x-5=$
6. $3a^2-ay-2y^2=$
7. $x^2+3ax-4a^2=$
8. $x^2+ax-12a^2=$
9. $4x^2+8xy+3y^2=$
10. $4a^2-4ax-3x^2=$

Θ. Δοκιμάστε να τις παραγοντοποιήσετε , αφήνοντας και τη φαντασία σας ελεύθερη:

1. $\left(x-2a\right)^2\left(x-2\right)-4x^3+8x^2=$
2. $3a(2x+1)-2y(2x+1)-2yx^2+3ax^2=$
3. $x^2-y^2+4x-6y-5=$
4. $4x^2-9y^2-8x-6y+3=$
5. $3a^2x-\left(3x+2\right)\left(4x^2-12x+9\right)+2a^2=$
6. $\left(x^2-9\right)^2-4\left(x+3\right)^2=$
7. $3\left(x-2\right)\left(x^2-9\right)+7\left(2-x\right)\left(3-x\right)^2=$
8. $25x^2-9y^2-10x-12y+3=$
9. $x^2y^2(z^4+1)-\left(x^4+y^4\right)z^2=$
10. $x^2\left(y+z\right)+y^2\left(x+z\right)+z^2\left(x+y\right)+2xyz=$
11. $x^2\left(y-z\right)+y^2\left(z-x\right)+z^2\left(x-y\right)=$
12. $xy\left(x-y\right)+yz\left(y-z\right)+xz\left(z-x\right)=$

Ι. Μερικές ασκήσεις με τις «μυστικές» ταυτότητες (Άθροισμα και διαφορά κύβων):

1. $8x^3-27=$
2. $a^3+8=$
3. $27+x^6=$
4. $\left(2x-1\right)^3+a^3x^3=$
5. $\left(1+2x\right)^3-8y^3=$
6. $\left(x+2\right)^3+\left(1-x\right)^3=$
7. $\left(2x+3\right)^3-\left(x-1\right)^3=$
8. $x^2\left(x^2-x+1\right)+x^4+x=$
9. $x^3-yx^2+xy-y+1=$
10. $x^3\left(y-z\right)+y^3\left(z-x\right)+z^3\left(x-y\right)=$

Παραδείγματα:

Α.16

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο ab^2 είναι κοινός παράγοντας και των τριών όρων του αθροίσματος, συνεπώς: $4\alpha^3 b^2 + 2\alpha b^3 - \alpha b^2 = \alpha b^2\left(4\alpha^2 + 2b - 1\right)$

Αξίζουν οι 14,15,17,18

Β.5

Παρατηρούμε ότι οι ποσότητες x-2 και 2-x που βρίσκονται εντός των παρενθέσεων είναι αντίθετες, δηλαδή ισχύει: 2-x = -(x-2).
Οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$4x(x-2) - 2(2-x) \;=\; 4x(x-2) + 2(x-2) \;=\; 2(x-2)(2x+1)$$

Αξίζουν οι 2,4,6,7,8

Γ.3

$$2\alpha^2 - 6\alpha - \alpha x + 3x \;=\; 2\alpha(\alpha-3) - x(\alpha-3) \;=\; (\alpha-3)(2\alpha - x)$$

Δοκιμάστε να τις λύσετε όλες αν έχετε χρόνο

Δ.3

$$\alpha^2 x^4 - 25 \;=\; (\alpha x^2)^2 - 5^2 \;=\; (\alpha x^2 - 5)(\alpha x^2 + 5)$$

Δ.5

$$x^4 - \alpha^4 \;=\; (x^2)^2 - (\alpha^2)^2 \;=\; (x^2 - \alpha^2)(x^2 + \alpha^2) \;=\; (x-\alpha)(x+\alpha)(x^2+\alpha^2)$$

Παρατηρούμε ότι οι ποσότητες x-2 και 2-x που βρίσκονται εντός των παρενθέσεων είναι αντίθετες, δηλαδή ισχύει: 2-x = -(x-2).
Οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$4x(x-2) - 2(2-x) \;=\; 4x(x-2) + 2(x-2) \;=\; 2(x-2)(2x+1)$$

Αξίζουν οι 4,12,13,15,16,17,18

Ε

Ουσιαστικά η άσκηση ζητάει να γίνει χρήση των ταυτοτήτων:

$(x+y)^2 \;=\; x^2 + 2xy + y^2$ και $(x-y)^2 \;=\; x^2 - 2xy + y^2$

Το "κόλπο" είναι να εντοπίσουμε πρώτα τους όρους x^2 και y^2 και έπειτα να επιβεβαιώσουμε με το διπλάσιο γινόμενο, δηλαδή:

Ε.3

$$9\alpha^2 + 12\alpha x^2 + 4x^4 \;=\; (3\alpha)^2 + 2\cdot 3\alpha \cdot 2x^2 + (2x^2)^2 \;=\; \left(3\alpha + 2x^2\right)^2$$

(η ε.1 δεν βγαίνει). Αξίζουν οι 2,4,5,9,10,11,12

ΣΤ.8

$$x^3(x+2)-4x(x+2)+\alpha x^2+4\alpha x+4\alpha \ =$$

$$x(x+2)\left(x^2-4\right)+\alpha(x^2+4x+4) \ =$$

$$x(x+2)\left(x^2-2^2\right)+\alpha(x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2) \ =$$

$$x(x+2)(x-2)(x+2)+\alpha(x+2)^2 \ =$$

$$x(x+2)^2(x-2)+\alpha(x+2)^2 \ =$$

$$(x+2)^2\left[x(x-2)+\alpha\right]$$

Δοκιμάστε να τις λύσετε όλες αν έχετε χρόνο

Ζ.1

$$x^2+2x+1-\alpha^2 \ = \ (x+1)^2-\alpha^2 \ = \ \left(x+1-\alpha\right)\left(x+1+\alpha\right)$$

Η.1

$$x^2-5x+6 \ = \ x^2-2x-3x+6 \ = \ x(x-2)-3(x-2) \ = \ (x-2)(x-3)$$

Πιο εύκολα, βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου και παραγοντοποιούμε με χρήση της σχέσης: $\alpha x^2+bx+c=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$

Δοκιμάστε να παραγοντοποιήσετε το Η.9 (δεν πρέπει να σας δυσκολέψει)
Έπειτα δοκιμάστε να επιλύσετε το: $4x^2+8xy+3y^2=0$ *ως τριώνυμο του x, δηλαδή ως τριώνυμο δευτέρου βαθμού με* $\alpha=4$, $b=8y$, $c=3y^2$.

Θ-Ι

Απολαύστε υπεύθυνα!!!