Δ Υ Ν Α Μ Ε Ι Σ

εκθέτης της δύναμης

Δύναμη: α^{ν}

βάση της δύναμης

Η δύναμη δεν πρέπει να τη σκεφτόμαστε σαν μια καινούργια πράξη αλλά ως ένα συμβολισμό, τη "συντομογραφία" ενός γινομένου: $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \ldots\ldots \cdot \alpha}_{\nu-\text{φορές}}$

πχ $2^5 = 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2$, $5^3 = 5{\cdot}5{\cdot}5$

Ορισμοί:

1) $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \ldots\ldots \cdot \alpha}_{\nu-\text{φορές}}$

2) $\alpha^{0} = 1$, για $\alpha \neq 0$

3) $\alpha^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}$, για $\alpha \neq 0$ και γενικότερα: $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$

Αρνητικός εκθέτης δηλώνει αντιστροφή της βάσης.

Ιδιότητες δυνάμεων με ίδια βάση:

1) Πολλαπλασιασμός δυνάμεων με ίδια βάση: $\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$

Τον πολλαπλασιασμό των δυνάμεων δεν πρέπει να τον διαβάζουμε ως πράξη, αλλά ως "το γινόμενο συνεχίζεται". Δηλαδή: $\boldsymbol{\alpha^{\nu}}$ (είναι ένα γινόμενο από α) , **επί** (το γινόμενο συνεχίζεται) , $\boldsymbol{\alpha^{\mu}}$ (ένα άλλο γινόμενο από α).
Τελικά, μέσα στο ΙΔΙΟ γινόμενο εμφανίζεται το **α** ως παράγοντας **ν+μ** φορές .
Πρόκειται για ιδιότητα "ξανασυμμαζέματος", ξαναμετράμε, δηλαδή, πόσα **α** εμφανίζονται **συνολικά** στο ίδιο γινόμενο.

πχ $2^3{\cdot}2^5 = 2{\cdot}2{\cdot}2 \cdot 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2 = 2^{3+5} = 2^8$

το γινόμενο συνεχίζεται

2) Πηλίκο δυνάμεων με ίδια βάση: $\dfrac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\nu-\mu}$

Πρόκειται για απλοποίηση κοινών παραγόντων μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή ενός κλάσματος. Παρατηρούμε ότι στο κλάσμα $\dfrac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}}$ τόσο ο αριθμητής, όσο και ο παρονομαστής είναι γινόμενο από κάμποσα **α** . Άρα το **α** είναι κοινός παράγοντας μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή, οπότε οι κοινοί παράγοντες (τα κοινά **α**) θα απλοποιηθούν και μετά την απλοποίηση θα απομείνουν **ν-μ** το πλήθος **α**.

πχ $\dfrac{2^7}{2^4} = \dfrac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 2\cdot 2\cdot 2 = 2^{7-4} = 2^3$

*Προσοχή, η διαφορά είναι πάντα: **εκθέτης αριθμητή – εκθέτης παρονομαστή**.*
Αν η διαφορά δώσει αρνητικό αποτέλεσμα σημαίνει ότι οι παράγοντες που απέμειναν μετά την απλοποίηση βρίσκονται στον παρονομαστή του κλάσματος.

3) Δύναμη που έχει ως βάση μία δύναμη: $\left(\alpha^{\nu}\right)^{\mu} = \alpha^{\nu\cdot\mu}$

Πρόκειται, ξανά, για μία ιδιότητα "ξανασυμμαζέματος", ξαναμετράμε πόσα α εμφανίζονται **συνολικά** στο ίδιο γινόμενο.
Κάθε πακέτο (γινόμενο) $\boldsymbol{\alpha^{\nu}}$ αποτελείται από **ν** παράγοντες **α**.
Επειδή , στο ίδιο γινόμενο, έχουμε **μ** το πλήθος τέτοια πακέτα (γινόμενα), τελικά ο παράγοντας **α** εμφανίζεται συνολικά **μ·ν** φορές.

πχ $\left(2^3\right)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6$

4) Γινόμενο παραγόντων υψωμένων στον ίδιο εκθέτη: $\left(\alpha\beta\right)^{\nu} = \alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}$

Πρόκειται, για ιδιότητα αναδιάταξης των παραγόντων μέσα στο ίδιο γινόμενο, για παράδειγμα η δύναμη $6^5 = (2\cdot 3)^5$ συμβολίζει ένα γινόμενο από 5 εξάρια ή αλλιώς, ένα γινόμενο από 5 δυάρια και 5 τριάρια, δηλαδή: $6^5 = (2\cdot 3)^5 = 2^5 3^5$.
(Αφού κάθε 6άρι γράφεται ως γινόμενο 2·3 και έχουμε συνολικά 5 6άρια, θα έχουμε και 5 δυάρια και 5 τριάρια, μέσα στο ίδιο γινόμενο.)

Η γραφή αυτή μας βολεύει ιδιαίτερα όταν θέλουμε να ξεχωρίσουμε τα δυάρια από τα τριάρια (ή γενικότερα τους παράγοντες **α** από τους παράγοντες **β**).

5) Δύναμη πηλίκου: $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$

Όπως και πριν, αφού το $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}$ συμβολίζει γινόμενο κλασμάτων και επειδή γνωρίζουμε ότι το γινόμενο κλασμάτων: "*είναι ένα κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών*" καταλαβαίνουμε ότι στο γινόμενο $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}$, στον αριθμητή το **α** θα πολλαπλασιαστεί **ν** φορές με τον εαυτό του, ενώ το ίδιο θα συμβεί και στον παρονομαστή με το **β**.

Τελικά θα έχουμε: $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \underbrace{\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\ldots\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}}_{\nu-\text{φορές}} = \dfrac{\overbrace{\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}^{\nu-\text{φορές}}}{\underbrace{\beta\cdot\ldots\cdot\beta}_{\nu-\text{φορές}}} = \dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$

πχ $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{3} = \underbrace{\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{5}}_{3-\text{φορές}} = \dfrac{\overbrace{2\cdot2\cdot2}^{3-\text{φορές}}}{\underbrace{5\cdot5\cdot5}_{3-\text{φορές}}} = \dfrac{2^3}{5^3}$

<u>Εφαρμογές</u>:

- $2^3\,5^4\,2^4\,5^2 = 2^{3+4}\,5^{4+2} = 2^7\,5^6$
  Τελικά, εντός του ίδιου γινομένου, συμμετέχουν, ως παράγοντες, 7 δυάρια συνολικά και 6 πεντάρια συνολικά.

- $\dfrac{5^3}{5^7} = 5^{3-7} = 5^{-4} = \dfrac{1}{5^4}$
  Έχουμε κοινό παράγοντα το 5, τρεις φορές στον αριθμητή και στον παρονομαστή. Μετά τις απλοποιήσεις των κοινών παραγόντων, θα απομείνουν 4 πεντάρια στον παρονομαστή.

- $$\frac{15^5}{3^7 5^2} = \frac{(3\cdot 5)^5}{3^7 5^2} = \frac{3^5\,5^5}{3^7\,5^2} = 3^{5-7}\,5^{5-2} = 3^{-2}\,5^3 = \frac{5^3}{3^2}$$
  Στον παρονομαστή του κλάσματος έχουμε γινόμενο από τριάρια και πεντάρια, ενώ στον αριθμητή έχουμε γινόμενο από 15άρια , δηλαδή πάλι από τριάρια και πεντάρια, αφού 15=3·5. Μετράμε σωστά πόσα τριάρια και πεντάρια έχουμε στον αριθμητή και τον παρονομαστή. Μετά τις απλοποιήσεις των κοινών παραγόντων, βλέπουμε ότι θα απομείνουν 3 πεντάρια στον αριθμητή και 2 τριάρια στον παρονομαστή.

- $$\frac{10^5\,21^4}{15^7 14^3} = \frac{(2\cdot 5)^5\cdot(3\cdot 7)^4}{(3\cdot 5)^6\cdot(2\cdot 7)^3} = \frac{2^5\,5^5\,3^4\,7^4}{3^6\,5^6\,2^3\,7^3} = 2^{5-3}\,3^{4-6}\,5^{5-6}\,7^{4-3} = 2^2\,3^{-2}\,5^{-1}\,7^1 = \frac{2^2\,7}{3^2\,5}$$

Κανόνας προσήμου:

- Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός.
- Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός.
- Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.

Παρατηρούμε ότι ο κανόνας προσήμου για τις δυνάμεις δικαιολογείται πλήρως από την εφαρμογή του κανόνα για γινόμενο πολλών παραγόντων, αφού η δύναμη είναι στην ουσία ένα γινόμενο.

πχ $(-2)^7 = -2^7$ ενώ $(-2)^8 = 2^8$

Σημαντική παρατήρηση:

$$-\alpha^\nu = -\underbrace{\alpha\cdot\ldots\ldots\cdot\alpha}_{\nu-\text{φορές}}$$

$$(-\alpha)^\nu = \underbrace{(-\alpha)\cdot\ldots\ldots\cdot(-\alpha)}_{\nu-\text{φορές}}$$

Ασκήσεις:

1. Να "συμμαζέψετε" / απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $2^3\,3^2\,2^4\,3^5 =$, β) $\dfrac{5^3\,3^6}{15^4} =$, γ) $4^2\,5\,4^3\,5^4 =$, δ) $\dfrac{3^6\,7^4}{21^5} =$

ε) $3^5\,2^3\,\,3^2\,2^4 =$, στ) $\dfrac{3^5\,4^3}{6^4} =$, ζ) $7^5\,3^3\,7^2\,3^4 =$, η) $\dfrac{3^7\,2^8}{12^4} =$

θ) $\dfrac{10^4\,21^5}{14^2\,15^3} =$

2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = \frac{8\alpha^3\beta^4\gamma^2}{4\alpha^2\beta^2\gamma} \quad , \quad B = \frac{3\alpha^4\beta^{-5}}{10\alpha^{-2}\beta^6} \quad , \quad \Gamma = \frac{\alpha^2\beta^3\gamma^{-4}}{\alpha^{-3}\beta^4\gamma^5}$$

$$\Delta = \left(\frac{x^{-2}y^4}{z^5}\right)^{-2}\left(\frac{x^{-1}z^2}{y^{-2}}\right)^3 \quad , \quad E = \frac{x^{-4}y^2\left(x^{-1}y^{-2}\right)^4\left(x^{-2}y\right)^{-1}}{\left(x^2y\right)^{-2}y^{-3}}$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \left\{\left[(-2)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-2}\left[(2)^{-1}\right]^2 \quad , \quad B = \frac{3^5\left(3^2\right)^{-1}}{\left(3^{-3}\right)^{-2}\left(3^2\right)^{-2}} \quad , \quad \Gamma = \frac{-(-5)(-5)}{-(-5^2)}$$

4. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \left\{\left[\left(2^{-5}\,3^{-7}\right)^{-1}\right]^0\right\}^2 \quad , \quad B = \frac{3^2\,2^3\,6^{-2}}{12^{-1}\,2^{-1}\,6} \quad , \quad \Gamma = \frac{\left(2^{-3}\,5^{-1}\right)^{-2}10^2}{\left(2^2\,5^3\right)^{-1}10^{-3}}$$