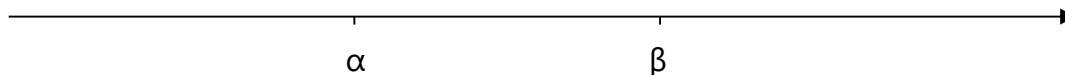


# ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Όταν διατάσσουμε δύο αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ , συμβολίζουμε με  $\alpha < \beta$  και διαβάζουμε: "ο  $\alpha$  είναι μικρότερος του  $\beta$ "

Η **διάταξη των αριθμών  $\alpha$  και  $\beta$**  παρουσιάζεται στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τοποθετώντας τον μεγαλύτερο αριθμό δεξιότερα από τον μικρότερο:



Ιδιότητες για μετασχηματισμό ανισοτήτων:

1. Αν  $\alpha < \beta$  και  $\beta < \gamma$  τότε ισχύει και:  $\alpha < \gamma$       Μεταβατική ιδιότητα

2.  $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$

Μπορώ να προσθέσω (ή να αφαιρέσω) τον ίδιο αριθμό και στα δύο μέλη μιας ανισότητας.

πχ Αν  $3 < 7$  τότε:  $3 + 4 < 7 + 4$  (πρόσθεση κατά μέλη με το 4)

ή:  $3 - 5 < 7 - 5$  (αφαίρεση κατά μέλη με το 5)

3. Αν  $\gamma > 0$  τότε:  $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$

Μπορώ να πολλαπλασιάσω (ή να διαιρέσω) με τον ίδιο θετικό αριθμό τα δύο μέλη μιας ανισότητας και η φορά διατηρείται.

πχ Αν  $-3 < 7$  τότε:  $-3 \cdot 5 < 7 \cdot 5$  (πολλαπλασιασμός κατά μέλη με το 5)

ή:  $-3/4 < 7/4$  (πολλαπλασιασμός κατά μέλη με το 1/4)

4. Αν  $\gamma < 0$  τότε:  $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$

Μπορώ να πολλαπλασιάσω (ή να διαιρέσω) με τον ίδιο αρνητικό αριθμό τα δύο μέλη μιας ανισότητας και η φορά αλλάζει.

πχ Αν  $-3 < 7$  τότε:  $(-3)(-2) > 7(-2)$  (πολλαπλασιασμός κατά μέλη με το -2)

ή:  $3/(-2) > 7/(-2)$  (πολλαπλασιασμός κατά μέλη με το -1/2)

5. Αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta$  τότε:  $\alpha + \gamma > \beta + \delta$

Μπορώ να προσθέσω κατά μέλη ανισότητες όμοιας φοράς.

Προσοχή:

ΔΕΝ ΑΦΑΙΡΟΥΜΕ ΠΟΤΕ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ

πχ Αν  $-3 < 7$  και  $2 < 5$  τότε  $-3 + 2 < 7 + 5$

(προσθέσαμε τα δύο μικρότερα μέλη και τα δύο μεγαλύτερα μέλη)

### Παρατηρήσεις:

1. Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ανισότητες κατά μέλη, ΜΟΝΟ αν όλα τα μέλη είναι μη-αρνητικοί αριθμοί, δηλαδή:

Αν  $\alpha > \beta$ ,  $\gamma > \delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$  τότε  $\alpha\gamma > \beta\delta$ .

2. Βάσει των παραπάνω, αν  $\alpha > \beta$  και  $\alpha, \beta \geq 0$  τότε και  $\alpha^y > \beta^y$ .

### Εφαρμογές:

1. Αν  $-2 < x < 3$  να φράξετε μεταξύ δύο αριθμών την ποσότητα:  $\dots < 2x - 7 < \dots$

Στην επίλυση της άσκησης μας καθοδηγεί το ζητούμενο. Δουλεύουμε, βήμα-βήμα, πρώτα πολλαπλασιαστικά και μετά προσθετικά:

- Αφού γνωρίζουμε ότι  $-2 < x < 3 \Rightarrow 2(-2) < 2x < 2 \cdot 3$  (πολλαπλασιάσαμε όλα τα μέλη με το 2 για να δημιουργήσουμε στο κέντρο της ανισότητας το  $2x$ )  
 $\Rightarrow -4 < 2x < 6$

- Τέλος αφού δείξαμε ότι:  $-4 < 2x < 6$  (προσθέσαμε σε όλα τα μέλη το  $-7$  για να δημιουργήσουμε στο κέντρο της ανισότητας το  $2x - 7$ )  
 $\Rightarrow -4 - 7 < 2x - 7 < 6 - 7$   
 $\Rightarrow -11 < 2x - 7 < -1$

2. Αν  $2 < x < 5$  να φράξετε μεταξύ δύο αριθμών την ποσότητα:  $\dots < \mathbf{10-3x} < \dots$

- Αφού γνωρίζουμε ότι  $2 < x < 5 \Rightarrow -3 \cdot 2 > -3x > -3 \cdot 5$  (Πολλαπλασιάσαμε όλα τα μέλη με το  $-3$  για να δημιουργήσουμε στο κέντρο της ανισότητας το  $-3x$ . Κατά τον πολλαπλασιασμό με τον αρνητικό αριθμό δεν ξεχάσαμε να αλλάξουμε τη φορά της.)  
 $\Rightarrow -6 > -3x > -15$   
ή  $-15 < -3x < -6$
- Τέλος αφού δείξαμε ότι:  $-15 < -3x < -6$  (προσθέσαμε σε όλα τα μέλη το  $10$  για να δημιουργήσουμε στο κέντρο της ανισότητας το  $10-3x$ )  
 $\Rightarrow 10-15 < 10-3x < 10-6$   
 $\Rightarrow -5 < 10-3x < 4$

3. Αν  $3 < x < 5$  και  $-2 < y < 4$  να φράξετε μεταξύ δύο αριθμών την ποσότητα:  
 $\dots < \mathbf{2x-3y-5} < \dots$

- Αφού γνωρίζουμε ότι  $3 < x < 5 \Rightarrow 2 \cdot 3 < 2x < 2 \cdot 5$  (Πολλαπλασιάσαμε όλα τα μέλη με το  $2$  για να δημιουργήσουμε στο κέντρο της ανισότητας το  $2x$ .)  
 $\Rightarrow 6 < 2x < 10$
- Αφού γνωρίζουμε ότι  $-2 < y < 4 \Rightarrow -3(-2) > -3y > -3 \cdot 4$  (Πολλαπλασιάσαμε όλα τα μέλη με το  $-3$  για να δημιουργήσουμε στο κέντρο της ανισότητας το  $-3y$ , δίχως να ξεχάσουμε να αλλάξουμε φορά.)  
 $\Rightarrow 6 > -3y > -12$   
ή  $-12 < -3y < 6$
- Αφού δείξαμε ότι:  $6 < 2x < 10$   
και:  $-12 < -3y < 6$   
αθροίζοντας κατά μέλη τις δύο ανισότητες όμοιας φοράς παίρνουμε:  
 $6+(-12) < 2x+(-3y) < 10+6 \Rightarrow -6-5 < 2x-3y-5 < 16-5 \Rightarrow -11 < 2x-3y-5 < 11$

## Ασκήσεις:

1. Αν  $-3 < y < 2$  βρείτε δύο αριθμούς μεταξύ των οποίων βρίσκεται η παράσταση :  
 $... < 7 - 5y < ...$
2. Αν  $-6 < x < -2$  βρείτε δύο αριθμούς μεταξύ των οποίων βρίσκεται η παράσταση:  
α)  $... < 2x - 3 < ...$
3. Αν  $-6 < x < 3$  και  $-4 < y < -1$  βρείτε δύο αριθμούς μεταξύ των οποίων  
βρίσκεται η παράσταση:  $... < 3y - \frac{x}{3} - 5 < ...$
4. Αν  $\alpha^2 < \alpha$  και  $\beta < \beta^2$  τότε:
  - (i) Να δείξετε ότι  $\alpha \neq \beta$
  - (ii) Οι αριθμοί  $\alpha - \beta$  και  $\alpha + \beta - 1$  είναι ετερόσημοι.